

**КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ**  
**муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников**  
**2025-2026 учебный год**

**по МАТЕМАТИКЕ**  
**10 класс**

На олимпиаде используется 7-балльная шкала: каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных участником. Основные принципы оценивания приведены в таблице:

Баллы	Критерии оценивания
7	Полное верное решение.
6	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
4–5	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. В задаче «Оценка + пример» доказана оценка.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. В задаче «Оценка + пример» построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Кроме того,

- 1) результатом выполнения каждого задания должна быть запись полного решения со всеми необходимыми обоснованиями и выводами; ответ без обоснований (если они требуются) оценивается в 0 баллов;
- 2) любое правильное (полное) решение оценивается в 7 баллов; недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;
- 3) олимпиадная работа не является контрольной работой, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;
- 4) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
- 5) если к задаче приведены указания к оцениванию – они имеют приоритет над общими указаниями.

1. Может ли так случиться, что число  $a(b + c)$  оканчивается на 1, число  $b + ac$  оканчивается на 2, число  $c(a + b)$  оканчивается на 3 при некоторых натуральных  $a, b, c$ ?

*Ответ:* Не может. *Решение.* Из первого условия следует, что числа  $a$  и  $b + c$  нечётны, а из третьего условия — что нечётны числа  $c$  и  $a + b$ . Тогда число  $b$  чётно, а число  $b + ac$  — нечётно, поэтому оно не оканчивается на 2.

---

2. У Пети есть белая клетчатая доска  $2025 \times 2025$ . За один ход Петя выбирает линию (строку или столбец), в которой в данный момент все клетки белые, и перекрашивает какие-то 1000 клеток этой линии в чёрный. Какое наибольшее количество клеток Петя может в результате сделать чёрными?

*Ответ:*  $1000 \cdot 2025 + 1025 \cdot 1000 = 3050000$ .

*Решение.*

*Оценка.* Будем говорить, что Петя сделал ход в линию, если он закрасил 1000 клеток из этой линии. Очевидно, в каждую линию можно сделать ход не более одного раза. Пусть, не умаляя общности, в первый свой ход Кирилл сделал ход в столбец. Тогда Кирилл уже не сможет сделать ход в 1000 линий (которые содержат перекрашенные клетки первого хода). Следовательно, всего перекрашено будет не более  $1000 \cdot 2025 + 1025 \cdot 1000 = 3050000$  клеток.

*Пример.* Делаем ход во все столбцы, закрашивая каждый раз 1000 верхних клеток, затем делаем ход в 1024 нижних строк, закрашивая в них любые клетки.

*Пример — 3б*

*Оценка — 4б*

---

3. Точка  $M$  — середина боковой стороны  $AB$ , а точка  $N$  — середина боковой стороны  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$ . Точка  $D$  на отрезке  $AM$  выбрана так, что  $\angle CND = 90^\circ$ . Луч  $CD$  пересекает прямую  $MN$  в точке  $E$ . Точка  $F$  отмечена на отрезке  $CN$  таким образом, что  $BF = CE$ . Докажите, что из отрезков  $DE, DF$  и  $MN$  можно сложить треугольник.

*Решение.* Отметим на луче  $ME$  такую точку  $G$ , что  $MG = EN$ . Заметим, что  $\angle GMB = \angle ENC$  и  $MG = NC$ . Тогда по первому признаку равны треугольники  $GMB$  и  $ENC$ . Из этого следует, что  $\angle DCF = \angle DBG$ . Из равнобедренности треугольника  $BDC$  (в нём медиана совпадает с высотой) следует, что  $\angle DCF = \angle DBF$ . Следовательно, треугольники  $DBG$  и  $DBF$  равны по двум сторонам и углу между ними. Таким образом, равны отрезки  $GD$  и  $DF$ . Осталось заметить, что  $GE = GM = EN - EM = MN$ . Мы получили треугольник  $GED$ , стороны которого равны нужным отрезкам.

---

4. Найдите все натуральные  $n$ , при которых  $11^n - 1$  делится на  $10^n - 1$ .

*Ответ:*  $\emptyset$  (таких  $n$  нет).

*Решение.* Предположим, что  $10^n - 1 \mid 11^n - 1$ . Так как  $10 \equiv 1 \pmod{3}$ , то  $3 \mid 10^n - 1$ , а значит  $3 \mid 11^n - 1$ . Но  $11 \equiv 2 \pmod{3}$ , поэтому  $2^n \equiv 1 \pmod{3}$ , откуда  $n$  чётное.

Теперь рассмотрим сравнения по модулю 11. Имеем  $10 \equiv -1 \pmod{11}$ , поэтому при чётном  $n$ :  $10^n - 1 \equiv (-1)^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$  то есть  $11 \mid (10^n - 1)$ . Из делимости  $10^n - 1 \mid 11^n - 1$  следовало бы, что  $11 \mid (11^n - 1)$ , но на самом деле:  $11^n - 1 \equiv 0 - 1 = -1 \not\equiv 0 \pmod{11}$  Противоречие. Следовательно, таких натуральных  $n$  не существует.

*Доказано, что  $n$  – четное. Продвижение 3 балла.*

---

5. Лёша и Саша играют в крестики-нолики на бесконечной клетчатой доске. За свой ход Лёша ставит два крестика, а Саша — три нолика. Задача Лёши — собрать L-пентамино из крестиков (уголок из 5 клеток) в любой ориентации. Может ли Саша ему помешать?

*Ответ:* выигрывает Лёша.

*Решение.*

Ход 1. Лёша ставит два крестика очень далеко друг от друга (скажем, на расстоянии 100 и по оси  $x$ , и по оси  $y$ ). Для каждого из поставленных крестиков  $X$  рассмотрим прямоугольник  $5 \times 3$ , в котором  $X$  — центральная нижняя клетка. Эти два прямоугольника можно выбрать четырьмя способами каждый и оба выбранных прямоугольника не пересекаются. За свой ход Саша ставит три нолика.

Ход 2. По принципу Дирихле хотя бы в одной из окрестностей крестика будет не более одного нолика. Обозначим этот крестик как  $X^*$ . Вокруг  $X^*$  есть четыре возможных продолжения до прямоугольника  $5 \times 3$  (вверх, вниз, влево, вправо). Хотя бы одно из этих направлений будет свободно от ноликов. Лёша дополняет  $X^*$  до полосы  $1 \times 3$  в этом свободном направлении.

После хода Лёши у нас есть прямоугольник  $5 \times 3$  с полоской  $1 \times 3$  внутри и без ноликов.

Ход Саши. Теперь вокруг готовой полосы  $1 \times 3$  существует четыре способа немедленно завершить «уголок из 5 клеток»: у каждого из двух концов полосы можно достроить перпендикулярное «плечо» из двух клеток налево или направо, всего перекрытых таких из них четыре варианта, но менее четырёх клеток. Имея только 3 нолика за ход, он может заблокировать не более трёх вариантов.

Ход 3. Лёша ставит два крестика в оставшиеся свободные две клетки и завершает уголок. Следовательно, при описанной стратегии Лёша побеждает.

*Если приведенная стратегия в решении не работает хотя бы для одного из случаев – 0 баллов.*